Corso di Laurea in Fisica		
Esame scritto di GEOMETRIA I – Appello del 26 Agosto 2019		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1 (8 punti). Per ogni numero reale k si consideri l'operatore F_k sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ definito da

$$F_k(at^3+bt^2+ct+d) = (ka-d)t^3 + (a+b+c+d)t^2 + (b+2c+d)t + (a-kb-c)$$

(1) Si determini per quali valori del parametro k la funzione F_k è iniettiva e/o suriettiva.

(2) Si calcolino, per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, basi del nucleo e dell'immagine di F_k.

(3) Si determinino equazioni parametriche di $F_k^{-1}(-t^3+4t^2+4t)$ per ogni valore di k per cui esso è un sottospazio affine di $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$.

La matrice associata a F_k rispetto alla base $t^3, t^2, t, 1$ è $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -k & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Per rispondere all'ultima domanda devo risolvere il sistema lineare avente la seguente matrice completa, che riduco a forma triangolare superiore mediante algoritmo di Gauß - Jordan:

$$(\dagger)\quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -k & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -k & -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -k-1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -k & -k & -1-k & -1-4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & -k & -1-k & -1-4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2k & 2k+2 & 8k+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & 4k+2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo operato in maniera non standard, ottenendo una matrice non a scalini ma ugualmente semplice e facendo meno conti. Al terzo passaggio abbiamo cambiato segno alla terza riga e sottratto ad essa la seconda ottenendo una riga con vari zeri. Al passaggio successivo abbiamo sottratto la terza riga alla quarta moltiplicata per -2. Nell'ultimo abbiamo sottratto alla quarta riga la seconda moltiplicata per k.

(1) La matrice ottenuta togliendo l'ultima colonna dalla matrice risultante dall'algoritmo $(\dagger)$ ha rango 4 per $k \neq 0, -2$ e 3 altrimenti e quindi lo stesso vale per il rango di A_k e quello di F_k. Quindi F_k è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se $k \notin \{0, -2\}$.

(2) Dalla risposta alla domanda precedente la risposta è ovvia per $k \notin \{0, -2\}$, in quanto il nucleo è banale e l'immagine tutto: basi rispettive sono l'insieme vuoto e la base monomiale $t^3, t^2, t, 1$. Per $k = 0, -2$ invece il nucleo ha dimensione 1 e quindi è generato da un qualunque polinomio non nullo i cui coefficienti siano nel nucleo di A_k: troviamo rispettivamente

$$N(F_{-2}) = \langle t^3 + t - 2 \rangle \qquad N(F_0) = \langle t^3 - 2t^2 + t \rangle.$$

e per trovare una base dell'immagine basta completare tale base del nucleo a una base dello spazio, e prendere le immagini dei vettori aggiunti. Scegliendo in ambedue i casi $t^2, t, 1$ otteniamo

$$Im(F_{-2}) = \langle t^2+t+2, t^2+2t-1, -t^3+t^2+t \rangle \qquad Im(F_0) = \langle t^2+t, t^2+2t-1, -t^3+t^2+t \rangle.$$

(3) Per $k \notin \{0, -2\}$ F_k è invertibile e quindi il luogo è formato da un solo polinomio, le cui coordinate risolvono il sistema $(\dagger)$, il polinomio $\frac{3t^3+3t+4k+2}{k+2}$. Per $k = -2$ l'ultima riga di $(\dagger)$ mostra che il sistema non è risolubile e quindi il luogo è vuoto. Infine, visto che il polinomio trovato risolve il sistema anche per $k = 0$, il luogo cercato in tal caso è una retta la cui direzione conosciamo avendo calcolato il nucleo di F_0. Otteniamo la parametrizzazione (con parametro s) seguente

$$\frac{3t^3+3t+2}{2} + s(t^3 - 2t^2 + t).$$

Esercizio 2 (8 punti). Sia dato uno spazio affine $\mathbb{A}$ con un riferimento affine $Oe_1e_2e_3$ e si considerino su di esso le rette di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases} \qquad\qquad s_k\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$

(1) Si determini la posizione relativa di r con ciascuna retta s_k.
(2) Si calcoli un'equazione cartesiana di ciascun piano parallelo a r e s_1 contenente $P(1,5,2)$.
(3) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si calcoli un'equazione cartesiana di ciascun piano perpendicolare a r e s_k contenente $P(1,5,2)$.

(1) Ponendo a sistema le equazioni ottenute per r e s_k otteniamo il sistema di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 5 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & k & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & 26 & 23 \\ 0 & -3 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & k+5 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 3 & 3k+15 & 24 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3k+41 & 47 \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da 0 per $k \neq 2$, nel qual caso le rette r e s_k sono quindi sghembe. Invece per $k = 2$ hanno rango 3 tanto la matrice dei coefficienti quanto quella completa per cui r e s_2 sono incidenti.

(2) Dal momento che r e s_1 sono sghembe, le loro direzioni sono indipendenti, e quindi generano un piano Π, e i piani paralleli a r e s_1 sono i piani paralleli a Π. Ne segue che un tale piano esiste ed è unico. Più precisamente, risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle equazioni cartesiane di r e s_1 troviamo che loro vettori direzione sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e quindi il piano cercato ha equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e quindi equazione cartesiana data dall'annullamento di

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -11 & 3 \\ x_2 - 5 & 26 & 1 \\ x_3 - 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 - 1)\det\begin{pmatrix} 26 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - (x_2 - 5)\det\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + (x_3 - 2)\det\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-130 - 3)(x_1 - 1) - (55 - 9)(x_2 - 5) + (-11 - 78)(x_3 - 2) = -133(x_1 - 1) - 46(x_2 - 5) - 89(x_3 - 2).$$

Si tratta quindi del piano di equazione cartesiana

$$133x_1 + 46x_2 + 89x_3 = 541.$$

(3) In uno spazio affine di dimensione 3 un piano può essere perpendicolare a due rette contemporaneamente solo se esse sono parallele, quindi condizione necessaria perché un tale piano esista è che s_k sia parallela a r.

Perché ciò succeda il vettore direzione di r da noi calcolato, $\begin{pmatrix} -11 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix}$, deve appartenere alla giacitura di s_k e quindi essere tra le soluzione del sistema delle equazioni cartesiane date di s_k, il che si vede immediatamente essere falso per ogni k, in quanto tale vettore non verifica la seconda equazione, indipendente da k:

$$2(-11) - 26 + 3 \neq 0.$$

Quindi un tale piano non esiste, qualunque sia k.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri la base standard e_1, e_2, e_3, e_4 dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$.

Sia F l'unico operatore su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(e_1) = 4e_4 \qquad F(e_2) = 3e_3 \qquad F(e_3) = 2e_2 \qquad F(e_4) = e_1$$

(1) Si calcoli lo spettro di F.
(2) Si determini se F è diagonalizzabile.
(3) Si produca una base di ciascun autospazio di F, e se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di F.
(4) Detta Id l'identità di $\mathbb{R}^4$, si calcoli una base del nucleo di $(F \circ F - 6Id)^{123456789}$.

(1) La matrice associata a F rispetto alla base standard è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -T & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -T & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -T \end{pmatrix} = -T \det \begin{pmatrix} -T & 2 & 0 \\ 3 & -T & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & -T & 2 \\ 0 & 3 & -T \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= T^2 \det \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 3 & -T \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 3 & -T \end{pmatrix} = (T^2 - 4) \det \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 3 & -T \end{pmatrix} =$$

$$(T^2 - 4)(T^2 - 6) = (T - 2)(T + 2)\left(T - \sqrt{6}\right)\left(T + \sqrt{6}\right).$$

Quindi lo spettro di F è l'insieme $\{\pm 2, \pm\sqrt{6}\}$.

(2) L'operatore ha quattro autovalori distinti, ossia tutti con molteplicità algebrica 1, e quindi è diagonalizzabile.

(3) Gli autospazi hanno tutti dimensione 1, quindi basta trovare un vettore non nullo in ciascuno di essi:

$$V_2 = N(A - 2I_4) = N\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-2} = N(A + 2I_4) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\sqrt{6}} = N\left(A - \sqrt{6}I_4\right) = N\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{6} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{6} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-\sqrt{6}} = N\left(A + \sqrt{6}I_4\right) = N\left(\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{6} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{6} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

I quattro vettori trovati formano insieme una base di autovettori di F.

(4) Essendo F diagonalizzabile, lo è anche $F \circ F$, avendo gli stessi autovettori con autovalori uguali al quadrato di quelli di F. In effetti in questo caso $F \circ F$ (al contrario di F) è diagonale anche rispetto alla base standard, e la matrice di $F \circ F - 6Id$ è uguale (rispetto alla base standard o a una base di autovettori di F ordinati opportunamente)

$$A^2 - 6I_4 := \begin{pmatrix} 4-6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha quindi rango 2 cosí come tutte le sue potenze.

Esercizio 4 (8 punti). Si consideri, sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, t, la forma quadratica

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(xt + yz) - 2(xz + yt) + 4(xy + zt)$$

(1) Si calcoli la segnatura di q.
(2) Si deduca dalla risposta precedente se q è degenere e se è definita o semidefinita, positiva o negativa.
(3) Si indichi la forma normale di q e si determini una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale q assume la forma normale.

(1) La matrice della forma quadratica q rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$ è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è

$$\det\begin{pmatrix} 1-T & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1-T & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-T & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1-T \end{pmatrix} = (1-T)\det\begin{pmatrix} 1-T & 1 & -1 \\ 1 & 1-T & 2 \\ -1 & 2 & 1-T \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1-T & 2 \\ -1 & 2 & 1-T \end{pmatrix} +$$

$$-\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1-T & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1-T \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1-T & 1 & -1 \\ 1 & 1-T & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-T)^2\det\begin{pmatrix} 1-T & 2 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} - (1-T)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} - (1-T)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-T & 2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1-T & 2 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} +$$

$$+ 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-T & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} - (T-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} +$$

$$\cancel{+\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-T & 2 \end{pmatrix} + (1-T)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-T & 2 \end{pmatrix} \cancel{-\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= ((T-1)^2 - 4)\det\begin{pmatrix} 1-T & 2 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} + (T-1+T-1-2-2-2+T-1-2+T-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1-T \end{pmatrix} =$$

$$= ((T-1)^2-4)^2 + (4T-12)(1-T+2) = (T^2-2T-3)^2 - 4(T-3)^2 =$$

$$= (T+1)^2(T-3)^2 - 4(T-3)^2 = ((T+1)^2-4)(T-3)^2 = (T-1)(T+3)(T-3)^2$$

per cui gli autovalori sono 3, con molteplicità 2, e 1, -3, con molteplicità 1: q ha segnatura $(3, 1)$.

(2) Ci sono autovalori positivi e negativi ma non 0, quindi q è indefinita e non degenere.

(3) Essendo la segnatura $(3, 1)$ la sua forma normale è $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Otteniamo, ortonormalizzando *à la* Gram-Schmidt, basi ortonormali di ciascun autospazio, cominciando da quello di autovalore 3.

$$V_3 = N\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per i due autovalori successivi, visto che hanno molteplicità 1, basta un autovettore di norma 1.

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_{-3} = N\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La base richiesta si ottiene dividendo ciascun autovettore trovato per la radice quadrata del modulo del suo autovalore ed ordinando i risultati ponendo per ultimo l'autovettore di autovalore negativo:

$$\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$